

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
11.02.2023

CLASA a IX -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația

$$3\{x\}^2 + 11\{x\} = 7x - 5.$$

Prin $\{x\}$ am notat partea fracționară a numărului real x .

Soluție:

$$\text{Cum } 0 \leq \{x\} < 1 \Rightarrow 0 \leq 3\{x\}^2 + 11\{x\} < 14 \Rightarrow 0 \leq 7x - 5 < 14 \Rightarrow \frac{5}{7} \leq x < \frac{19}{7}.$$

$$\text{Cum } [x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] \in \{0, 1, 2\}.$$

1) Dacă $[x] = 0$, atunci $x = \{x\}$, iar ecuația devine $3\{x\}^2 + 4\{x\} + 5 = 0$.

Notând $\{x\} = y$, ecuația devine

$$3y^2 + 4y + 5 = 0, \text{ care nu are soluții reale.}$$

2) Dacă $[x] = 1$, atunci $x = 1 + \{x\}$, iar ecuația devine $3\{x\}^2 + 4\{x\} - 2 = 0$.

Notând $\{x\} = y$, ecuația devine

$$3y^2 + 4y - 2 = 0 \text{ cu soluțiile } y_1 = \frac{-2+\sqrt{10}}{3} \in [0,1) \text{ și } y_2 = \frac{-2-\sqrt{10}}{3} \notin [0,1).$$

$$\text{Rezultă soluția } x_1 = 1 + y_1 = \frac{1+\sqrt{10}}{3}.$$

3) Dacă $[x] = 2$, atunci $x = 2 + \{x\}$, iar ecuația devine $3\{x\}^2 + 4\{x\} - 9 = 0$.

Notând $\{x\} = y$, ecuația devine

$$3y^2 + 4y - 9 = 0 \text{ cu soluțiile } y_3 = \frac{-2+\sqrt{31}}{3} \notin [0,1) \text{ și } y_4 = \frac{-2-\sqrt{31}}{3} \notin [0,1).$$

$$\text{Concluzionăm că ecuația are unica soluție } x_1 = \frac{1+\sqrt{10}}{3}.$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce că $[x] \in \{0, 1, 2\}$.	2p
Arată că în cazul $[x] = 0$ ecuația nu are soluții reale.	1p
Arată că în cazul $[x] = 1$ ecuația are soluția $x_1 = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$.	2p
Arată că în cazul $[x] = 2$ ecuația nu are soluții.	1p
Deduce că unica soluție a ecuației este $x_1 = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$.	1p

2. a) Demonstrați că pentru orice numere reale pozitive a, b, c care loc inegalitatea

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

- b) Aflați numerele reale pozitive a, b, c, x, y, z cu $a + b + c = x + y + z = 3$ și

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{yz\sqrt{x}}{xy+z} + \frac{zx\sqrt{y}}{yz+x} + \frac{xy\sqrt{z}}{zx+y}.$$

Soluție:

- a) Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+a+c}{a+c} + \frac{c+a+b}{a+b} \geq \frac{3}{2} + 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a+b+a+c+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) \geq 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{a+b}{a+c} + \frac{a+b}{b+c} + \frac{a+c}{a+b} + 1 + \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{b+c}{a+c} + 1 \geq 9. (*)$$

Dar, cum $a, b, c > 0$, avem $\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} \geq 2$;

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} \geq 2;$$

$$\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} \geq 2,$$

care prin însumare conduc la relația (*), ceea ce încheie demonstrația.

- b) Aplicând la numitor inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică avem că

$$\frac{yz\sqrt{x}}{xy+z} + \frac{zx\sqrt{y}}{yz+x} + \frac{xy\sqrt{z}}{zx+y} \leq \frac{yz\sqrt{x}}{2\sqrt{xyz}} + \frac{zx\sqrt{y}}{2\sqrt{xyz}} + \frac{xy\sqrt{z}}{2\sqrt{xyz}} = \frac{\sqrt{yz}}{2} + \frac{\sqrt{zx}}{2} + \frac{\sqrt{xy}}{2}.$$

Aplicând din nou inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică avem că

$$\frac{\sqrt{yz}}{2} + \frac{\sqrt{zx}}{2} + \frac{\sqrt{xy}}{2} \leq \frac{y+z}{4} + \frac{z+x}{4} + \frac{x+y}{4} = \frac{x+y+z}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Rezultă astfel că } \frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{yz\sqrt{x}}{xy+z} + \frac{zx\sqrt{y}}{yz+x} + \frac{xy\sqrt{z}}{zx+y} \leq \frac{3}{2},$$

ceea ce conduce la

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{yz\sqrt{x}}{xy+z} + \frac{zx\sqrt{y}}{yz+x} + \frac{xy\sqrt{z}}{zx+y} = \frac{3}{2}.$$

Deducem că $\frac{a+b}{a+c} = \frac{a+b}{b+c} = \frac{a+c}{a+b} = 1$, adică $a = b = c = 1$,

iar $xy = z, yz = x, zx = y$ și $x = y = z$,

de unde rezultă că

$$x = y = z = 1.$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Scrie inegalitatea echivalentă $\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+a+c}{a+c} + \frac{c+a+b}{a+b} \geq \frac{3}{2} + 3$.	1p
Scrie inegalitățile echivalente $(a+b+a+c+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) \geq 9$ și $1 + \frac{a+b}{a+c} + \frac{a+b}{b+c} + \frac{a+c}{a+b} + 1 + \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{b+c}{a+c} + 1 \geq 9$.	1p
Scrie că $\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} \geq 2$; $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} \geq 2$; $\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} \geq 2$ și concluzia.	1p
b) Arată că $\frac{yz\sqrt{x}}{xy+z} + \frac{zx\sqrt{y}}{yz+x} + \frac{xy\sqrt{z}}{zx+y} \leq \frac{yz\sqrt{x}}{2\sqrt{xyz}} + \frac{zx\sqrt{y}}{2\sqrt{xyz}} + \frac{xy\sqrt{z}}{2\sqrt{xyz}} = \frac{\sqrt{yz}}{2} + \frac{\sqrt{zx}}{2} + \frac{\sqrt{xy}}{2}$.	1p
Arată că $\frac{\sqrt{yz}}{2} + \frac{\sqrt{zx}}{2} + \frac{\sqrt{xy}}{2} \leq \frac{3}{2}$.	1p
Deduce că $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{yz\sqrt{x}}{xy+z} + \frac{zx\sqrt{y}}{yz+x} + \frac{xy\sqrt{z}}{zx+y} = \frac{3}{2}$.	1p
Deduce că $a = b = c = x = y = z = 1$.	1p

3. a) Fie $x \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$. Demonstrați că $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Q}$, pentru orice număr natural nenul n .

b) Demonstrați că $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \in \mathbb{Q}$, pentru orice număr natural n .

Soluție:

a) Demonstrăm prin inducție după n că propoziția $P(n): x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*$ este adevărată. $P(1)$ este adevărată din ipoteză. Presupunem $P(1), \dots, P(k)$ adevărate pentru $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ și demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată. Avem că

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) \in \mathbb{Q},$$

deci $P(k+1)$ este adevărată. Conform principiului inducției matematice, $P(n)$ este adevărată, pentru orice număr natural nenul n .

b) Pentru $n = 0$, avem că $(2 + \sqrt{3})^0 + (2 - \sqrt{3})^0 = 2 \in \mathbb{Q}$.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem că $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = (2 + \sqrt{3})^n + \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^n}$.

Cum $2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 4 \in \mathbb{Q}$,

aplicând a) se obține concluzia.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Verifică faptul că $P(1)$ este adevărată.	1p
Arată că $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$ și demonstrează că $P(k+1)$ este adevărată.	2p
Concluzionează pe baza principiului inducției matematice că $P(n)$ este adevărată, pentru orice număr natural nenul n .	1p
b) Demonstrează relația pentru $n = 0$.	1p
Arată că $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = (2 + \sqrt{3})^n + \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^n}$ și $2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 4 \in \mathbb{Q}$, de unde obține concluzia.	2p

4. În patrulaterul convex $ABCD$ se consideră punctele $E \in (BC), F \in (AD), G \in (AB), H \in (DC)$ astfel încât $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD} = \alpha$ și $\frac{AG}{GB} = \frac{DH}{HC} = \beta$. Se notează $\{M\} = EF \cap GH$. Să se arate că $\frac{GM}{MH} = \alpha$ și $\frac{FM}{ME} = \beta$.

Soluție:

Fie $N \in (GH)$ astfel încât $\frac{GN}{NH} = \alpha$. Rezultă că $\vec{r}_N = \frac{\vec{r}_G + \alpha \vec{r}_H}{1 + \alpha}$.

Cum $\frac{AG}{GB} = \frac{DH}{HC} = \beta$, deducem că $\vec{r}_G = \frac{\vec{r}_A + \beta \vec{r}_B}{1 + \beta}$ și $\vec{r}_H = \frac{\vec{r}_D + \beta \vec{r}_C}{1 + \beta}$,

deci $\vec{r}_N = \frac{\vec{r}_A + \alpha \vec{r}_D + \beta \vec{r}_B + \alpha \beta \vec{r}_C}{(1 + \alpha)(1 + \beta)}$.

Fie $P \in (EF)$ astfel încât $\frac{FP}{PE} = \beta$. Rezultă că $\vec{r}_P = \frac{\vec{r}_F + \beta \vec{r}_E}{1 + \beta}$.

Cum $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD} = \alpha$ deducem că $\vec{r}_E = \frac{\vec{r}_B + \alpha \vec{r}_C}{1 + \alpha}$ și $\vec{r}_F = \frac{\vec{r}_A + \alpha \vec{r}_D}{1 + \alpha}$,

deci $\vec{r}_P = \frac{\vec{r}_A + \alpha \vec{r}_D + \beta \vec{r}_B + \alpha \beta \vec{r}_C}{(1 + \alpha)(1 + \beta)}$.

Deducem că $\vec{r}_N = \vec{r}_P$, deci $N \equiv P$, de unde rezultă că $M \equiv N \equiv P$, deci

$\frac{GM}{MH} = \alpha$ și $\frac{FM}{ME} = \beta$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Consideră $N \in (GH)$ astfel încât $\frac{GN}{NH} = \alpha$ și deduce că $\vec{r}_N = \frac{\vec{r}_G + \alpha \vec{r}_H}{1 + \alpha}$.	1p
Deduce că $\vec{r}_G = \frac{\vec{r}_A + \beta \vec{r}_B}{1 + \beta}$ și $\vec{r}_H = \frac{\vec{r}_D + \beta \vec{r}_C}{1 + \beta}$.	1p
Deduce că $\vec{r}_N = \frac{\vec{r}_A + \alpha \vec{r}_D + \beta \vec{r}_B + \alpha \beta \vec{r}_C}{(1 + \alpha)(1 + \beta)}$.	1p
Consideră $P \in (EF)$ astfel încât $\frac{FP}{PE} = \beta$ și deduce că $\vec{r}_P = \frac{\vec{r}_F + \beta \vec{r}_E}{1 + \beta}$.	1p
Deduce că $\vec{r}_E = \frac{\vec{r}_B + \alpha \vec{r}_C}{1 + \alpha}$ și $\vec{r}_F = \frac{\vec{r}_A + \alpha \vec{r}_D}{1 + \alpha}$.	1p
Deduce că $\vec{r}_P = \frac{\vec{r}_A + \alpha \vec{r}_D + \beta \vec{r}_B + \alpha \beta \vec{r}_C}{(1 + \alpha)(1 + \beta)}$.	1p
Deduce că $\vec{r}_N = \vec{r}_P$, deci $N \equiv P$, de unde rezultă că $M \equiv N \equiv P$, deci $\frac{GM}{MH} = \alpha$ și $\frac{FM}{ME} = \beta$.	1p

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
11.02.2023**

CLASA a X -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

1. Să se arate că:

a) Numărul $\sqrt[3]{3}$ este irațional.

b) $\sqrt[3]{9 + \frac{10}{3}\sqrt{\frac{71}{3}}} + \sqrt[3]{9 - \frac{10}{3}\sqrt{\frac{71}{3}}} = 1.$

Soluție:

a) Presupunem prin reducere la absurd că $\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$. Rezultă că există $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$ astfel încât $\sqrt[3]{3} = \frac{m}{n}$. Avem $m^3 = 3n^3$, de unde rezultă că $m^3 : 3$, iar cum 3 este număr prim, rezultă că $m : 3$

Deci $m = 3k, k \in \mathbb{N}^*$.

Prin înlocuire în relația $m^3 = 3n^3$, obținem $27k^3 = 3n^3$, adică $n^3 = 9k^3$, de unde rezultă că $n : 3$

Faptul că $m : 3$ și $n : 3$ contrazice $(m, n) = 1$, de unde rezultă că presupunerea făcută este falsă.

Prin urmare, $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.

b) Fie $x = \sqrt[3]{9 + \frac{10}{3}\sqrt{\frac{71}{3}}} + \sqrt[3]{9 - \frac{10}{3}\sqrt{\frac{71}{3}}}$. Prin ridicare la puterea a treia, obținem:

$$x^3 = 9 + \frac{10}{3}\sqrt{\frac{71}{3}} + 9 - \frac{10}{3}\sqrt{\frac{71}{3}} + 3\sqrt[3]{\left(9 + \frac{10}{3}\sqrt{\frac{71}{3}}\right)\left(9 - \frac{10}{3}\sqrt{\frac{71}{3}}\right)} \cdot \left(\sqrt[3]{9 + \frac{10}{3}\sqrt{\frac{71}{3}}} + \sqrt[3]{9 - \frac{10}{3}\sqrt{\frac{71}{3}}}\right).$$

Efectuând calculele, se obține ecuația: $x^3 + 17x - 18 = 0$.

Aceasta este echivalentă cu ecuația $(x-1)(x^2 + x + 18) = 0$ care are soluția reală unică $x = 1$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) R.A . $\sqrt[3]{3} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$	1p
$m:3$	1p
$n:3$, contradicție.	1p
b) $x^3 = 18 - 17x$	2p
$(x-1)(x^2 + x + 18) = 0$	1p
$x^2 + x + 18 = 0$ nu are soluții reale , deci $x = 1$ este soluție unică.	1p

2. Fie $a, b, c \in (0,1)$. Arătați că:

- a) $\frac{4bc}{(a+b)(a+c)} \leq \frac{\sqrt{bc}}{a}$;
- b) $\log_a \frac{4bc}{(a+b)(a+c)} + \log_b \frac{4ac}{(a+b)(b+c)} + \log_c \frac{4ba}{(a+c)(b+c)} = 0$ dacă și numai dacă $a = b = c$.

Soluție:

a) Se aplică inegalitatea mediilor:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ \frac{a+c}{2} &\geq \sqrt{ac} \Rightarrow a+c \geq 2\sqrt{ac} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a+b)(a+c) \geq 4a\sqrt{bc}.$$

$$\Rightarrow \frac{4bc}{(a+b)(a+c)} \leq \frac{4bc}{4a\sqrt{bc}} = \frac{\sqrt{bc}}{a}.$$

b) **Implicația directă:**

Funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x, a \in (0,1)$, este strict descrescătoare.

$$\frac{4bc}{(a+b)(a+c)} \leq \frac{\sqrt{bc}}{a} \Rightarrow \log_a \frac{4bc}{(a+b)(a+c)} \geq \log_a \frac{\sqrt{bc}}{a} = \frac{1}{2}(\log_a b + \log_a c) - 1 \quad (1)$$

Procedând la fel, se obțin relațiile:

$$\log_b \frac{4ac}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{1}{2}(\log_b c + \log_b a) - 1 \quad (2)$$

$$\log_c \frac{4ab}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{1}{2}(\log_c a + \log_c b) - 1 \quad (3)$$

Adunând membru cu membru relațiile (1), (2) și (3), folosind ipoteza obținem:

$$0 \geq \frac{1}{2}(\log_a b + \log_a c) - 1 + \frac{1}{2}(\log_b c + \log_b a) - 1 + \frac{1}{2}(\log_c a + \log_c b) - 1 \Rightarrow$$

$$0 \geq \frac{1}{2}[(\log_a b + \log_b a) + (\log_b c + \log_c b) + (\log_c a + \log_a c)] - 3 \quad (4)$$

Cum $a, b, c \in (0,1)$ toți logaritmi din relația (4) sunt pozitivi.

$$\log_a b + \log_b a \geq 2$$

Însumând membru cu membru inegalitățile: $\log_b c + \log_c b \geq 2$, obținem:

$$\log_a c + \log_c a \geq 2$$

$(\log_a b + \log_b a) + (\log_b c + \log_c b) + (\log_c a + \log_a c) \geq 6$, de unde rezultă că

$$\frac{1}{2}[(\log_a b + \log_b a) + (\log_b c + \log_c b) + (\log_c a + \log_a c)] - 3 \geq 0 \quad (5)$$

Din relațiile (4) și (5) rezultă $\frac{1}{2}[(\log_a b + \log_b a) + (\log_b c + \log_c b) + (\log_c a + \log_a c)] - 3 = 0$,

deci $(\log_a b + \log_b a) + (\log_b c + \log_c b) + (\log_c a + \log_a c) = 6$.

Rezultă atunci $a = b = c$.

Implicația indirectă:

Dacă $a = b = c$, atunci $\log_a \frac{4bc}{(a+b)(a+c)} = \log_b \frac{4ac}{(a+b)(b+c)} = \log_c \frac{4ba}{(a+c)(b+c)} = 0$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $\left. \begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ \frac{a+c}{2} &\geq \sqrt{ac} \Rightarrow a+c \geq 2\sqrt{ac} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a+b)(a+c) \geq 4a\sqrt{bc}$	1p
$\frac{4bc}{(a+b)(a+c)} \leq \frac{4bc}{4a\sqrt{bc}} = \frac{\sqrt{bc}}{a}$	1p
b) Funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x, a \in (0,1)$, este strict descrescătoare. $\frac{4bc}{(a+b)(a+c)} \leq \frac{\sqrt{bc}}{a} \Rightarrow \log_a \frac{4bc}{(a+b)(a+c)} \geq \log_a \frac{\sqrt{bc}}{a} = \frac{1}{2}(\log_a b + \log_a c) - 1 \quad (1)$ Procedând la fel, se obțin relațiile: $\log_b \frac{4ac}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{1}{2}(\log_b c + \log_b a) - 1 \quad (2)$ $\log_c \frac{4ab}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{1}{2}(\log_c a + \log_c b) - 1 \quad (3)$ Adunând membru cu membru relațiile (1), (2) și (3) obținem: $0 \geq \frac{1}{2}(\log_a b + \log_a c) - 1 + \frac{1}{2}(\log_b c + \log_b a) - 1 + \frac{1}{2}(\log_c a + \log_c b) - 1 \Rightarrow$ $0 \geq \frac{1}{2}[(\log_a b + \log_b a) + (\log_b c + \log_c b) + (\log_c a + \log_a c)] - 3 \quad (4)$	2p
$\log_a b + \log_b a \geq 2$ Însușind membru cu membru inegalitățile: $\log_b c + \log_c b \geq 2$, obținem: $\log_a c + \log_c a \geq 2$ $(\log_a b + \log_b a) + (\log_b c + \log_c b) + (\log_c a + \log_a c) \geq 6, \text{ de unde rezultă că}$ $\frac{1}{2}[(\log_a b + \log_b a) + (\log_b c + \log_c b) + (\log_c a + \log_a c)] - 3 \geq 0 \quad (5)$ Din relațiile (4) și (5) rezultă $\frac{1}{2}[(\log_a b + \log_b a) + (\log_b c + \log_c b) + (\log_c a + \log_a c)] - 3 = 0,$ deci $(\log_a b + \log_b a) + (\log_b c + \log_c b) + (\log_c a + \log_a c) = 6.$	2p
Dacă $a = b = c$, atunci toți logaritmi sunt nuli, deci au suma nulă.	1p.

3. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ numere complexe distincte, astfel încât

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1 = 0.$$

a) Demonstrați că $z_1^2 = z_2 \cdot z_3$.

b) Demonstrați că $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

c) Demonstrați că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Soluție:

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 = 0 &\Rightarrow z_2 + z_3 = -z_1 \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0 &\Leftrightarrow z_1(z_2 + z_3) + z_2 z_3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_2 z_3 - z_1^2 = 0 \Rightarrow z_1^2 = z_2 z_3$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} z_1^2 = z_2 z_3 &\Rightarrow z_1^3 = z_1 z_2 z_3 \\ z_2^2 = z_1 z_3 &\Rightarrow z_2^3 = z_1 z_2 z_3 \\ z_3^2 = z_1 z_2 &\Rightarrow z_3^3 = z_1 z_2 z_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_1^3 = z_2^3 = z_3^3 \Rightarrow |z_1|^3 = |z_2|^3 = |z_3|^3 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = |z_3|$$

c) Fie $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ imaginile geometrice ale numerelor complexe z_1, z_2, z_3 .

Cum $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, originea planului complex este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. $z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = 0$, deci originea planului complex

este centrul de greutate al triunghiului ABC, prin urmare triunghiul ABC este echilateral.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $\left. \begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 = 0 &\Rightarrow z_2 + z_3 = -z_1 \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0 &\Leftrightarrow z_1(z_2 + z_3) + z_2 z_3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_2 z_3 - z_1^2 = 0 \Rightarrow z_1^2 = z_2 z_3$	2p
b) $\left. \begin{aligned} z_1^2 = z_2 z_3 &\Rightarrow z_1^3 = z_1 z_2 z_3 \\ z_2^2 = z_1 z_3 &\Rightarrow z_2^3 = z_1 z_2 z_3 \\ z_3^2 = z_1 z_2 &\Rightarrow z_3^3 = z_1 z_2 z_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$	1p
$\Rightarrow z_1 ^3 = z_2 ^3 = z_3 ^3$	1p
$\Rightarrow z_1 = z_2 = z_3 $	1p
c) Fie $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ imaginile geometrice ale numerelor complexe z_1, z_2, z_3 Cum $ z_1 = z_2 = z_3 $, originea planului complex este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.	1p
Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. $z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = 0$, deci originea planului complex este centrul de greutate al triunghiului ABC, prin urmare triunghiul ABC este echilateral	1p

4. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x^2 + yf(y)) = xf(x) + y^2, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Soluție:

Pentru $x = 0, y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

Pentru $x = 0 \Rightarrow f(yf(y)) = y^2, \forall y \in \mathbb{R}$.

Pentru $y = 0 \Rightarrow f(x^2) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Obținem astfel $f(f(x^2)) = f(xf(x)) = x^2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(f(x)) = x, \forall x \geq 0$.

Demonstrăm că $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Avem $-xf(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = xf(x) \Rightarrow x(f(x) + f(-x)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\left. \begin{array}{l} f(-x) = -f(x), \forall x \neq 0. \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ deci funcția } f \text{ este impară.}$

Pentru $x < 0, f(f(x)) = f(f(-(-x))) = f(-f(-x)) = -f(f(-x)) = -(-x) = x$.

Prin urmare, $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, deci $(f \circ f)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, deci funcția f este injectivă.

Înlocuind în relația din ipoteză $x \mapsto f(x)$, obținem

$$f(f^2(x) + yf(y)) = f(x)f(f(x)) + y^2 = xf(x) + y^2 = f(x^2 + yf(y)).$$

Din injectivitatea funcției f rezultă $f^2(x) + yf(y) = x^2 + yf(y)$, adică $f^2(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Reiese de aici că $f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ -x, & x \in B \end{cases}$, cu $A \cup B = \mathbb{R}, A \cap B = \emptyset$.

Demonstrăm că mulțimile A și B nu pot fi simultan nevide.

Dacă mulțimile A și B ar fi simultan nevide, atunci ar exista $x \in A$ și $y \in B$ cu $f(x) = x$ și $f(y) = -y$, cu x și y nenule.

Cum $f(x^2 + yf(y)) = xf(x) + y^2 \Rightarrow f(x^2 - y^2) = x^2 + y^2$. Dacă $x^2 - y^2 \in A$ avem $x^2 - y^2 = x^2 + y^2$ iar dacă $x^2 - y^2 \in B$ avem $-x^2 + y^2 = x^2 + y^2$, de unde obținem $y = 0$ sau $x = 0$, ceea ce contrazice alegerea făcută.

Prin urmare, avem fie $f(x) = x$, fie $f(x) = -x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Ambele funcții verifică ipoteza.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Pentru $x = 0, y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.	1p
Pentru $x = 0 \Rightarrow f(yf(y)) = y^2, \forall y \in \mathbb{R}$. Pentru $y = 0 \Rightarrow f(x^2) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$. $f(f(x^2)) = f(xf(x)) = x^2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(f(x)) = x, \forall x \geq 0$.	1p
$-xf(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = xf(x) \Rightarrow x(f(x) + f(-x)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. $\left. \begin{array}{l} f(-x) = -f(x), \forall x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, deci funcția f este impară.	1p
Pentru $x < 0, f(f(x)) = f(f(-(-x))) = f(-f(-x)) = -f(f(-x)) = -(-x) = x$ $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, deci $(f \circ f)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.	
Înseamnă atunci că funcția f este injectivă. Înlocuind în relația din ipoteză $x \mapsto f(x)$, obținem $f(f^2(x) + yf(y)) = f(x)f(f(x)) + y^2 = xf(x) + y^2 = f(x^2 + yf(y))$. Din injectivitatea funcției f rezultă $f^2(x) + yf(y) = x^2 + yf(y)$, adică $f^2(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.	1p
$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ -x, & x \in B \end{cases}, \text{ cu } A \cup B = \mathbb{R}, A \cap B = \emptyset.$	1p
Dacă mulțimile A și B ar fi simultan nevide, atunci ar exista $x \in A$ și $y \in B$ cu $f(x) = x$ și $f(y) = -y$, cu x și y nenule. Cum $f(x^2 + yf(y)) = xf(x) + y^2 \Rightarrow f(x^2 - y^2) = x^2 + y^2$. Dacă $x^2 - y^2 \in A$ avem $x^2 - y^2 = x^2 + y^2$ iar dacă $x^2 - y^2 \in B$ avem $-x^2 + y^2 = x^2 + y^2$, de unde obținem $y = 0$ sau $x = 0$, ceea ce contrazice alegerea făcută. Prin urmare, avem fie $f(x) = x$, fie $f(x) = -x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.	1p
Ambele funcții verifică ipoteza	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
11.02.2023

CLASA a XI -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție:

Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Se calculează $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$

Relația din enunț devine $\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Din egalitatea matricelor se obține sistemul:

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 1 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}$$

Din relația $b(a+d) = 0 \Rightarrow b=0 \text{ sau } a+d=0$

Dar $c(a+d) = 1$, deci $a+d \neq 0$ de unde rezultă $b=0$

Înlocuind în sistem $b=0$ se obține $a^2 = -1, a \in \mathbb{C} \Rightarrow a = \pm i$,

$$d^2 = 1, a \in \mathbb{C} \Rightarrow d = \pm 1$$

Se obțin următoarele cazuri:

$$\text{Cazul 1: } a = i, d = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{a+d} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ \frac{1-i}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Cazul 2: } a = i, d = -1 \Rightarrow c = \frac{1}{a+d} = \frac{1}{-1+i} = \frac{-1-i}{2} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ -\frac{1+i}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Cazul 3: } a = -i, d = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{a+d} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} \Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ \frac{1+i}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Cazul 4: } a = -i, d = -1 \Rightarrow c = \frac{1}{a+d} = \frac{1}{-1-i} = \frac{-1+i}{2} \Rightarrow A_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ \frac{-1+i}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
<p>Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$</p> <p>Calculează și obține relația $\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$</p>	2p
Deduce $a+d \neq 0 \Rightarrow b=0, a=\pm i, d=\pm 1$	2p
<p>Determină matricele</p> <p>$A_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ \frac{1-i}{2} & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ -\frac{1+i}{2} & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ \frac{1+i}{2} & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ \frac{-1+i}{2} & -1 \end{pmatrix}$</p>	3p

2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât urma matricei $\text{Tr}(A) = 1$. Să se arate că:

$$\det(A^2 + 5A + 5I_2) = \det(A^2 + A - 9I_2) - 8.$$

Soluție:

Conform teoremei Hamilton-Cayley $A^2 - \text{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2$, $d = \det(A)$

$$\Rightarrow A^2 - A + dI_2 = O_2.$$

$$\text{Atunci } A^2 = A - dI_2 \text{ și } A^2 + 5A + 5I_2 = 6A + (5 - d)I_2,$$

$$\text{respectiv } A^2 + A - 9I_2 = 2A - (d + 9)I_2.$$

$$\text{Fie funcția } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \det\begin{pmatrix} x+a & b \\ c & x+1-a \end{pmatrix} = x^2 + x + d$$

$$\text{Atunci } \det(6A + (5 - d)I_2) = \det 6\left(A + \frac{5-d}{6}I_2\right) = 6^2 \det\left(A + \frac{5-d}{6}I_2\right) = 36f\left(\frac{5-d}{6}\right) =$$

$$= 36\left[\left(\frac{5-d}{6}\right)^2 + \frac{5-d}{6} + d\right] = d^2 + 20d + 55.$$

$$\text{Analog, } \det(2A - (d + 9)I_2) - 8 = 4f\left(\frac{-d-9}{2}\right) - 8 = d^2 + 20d + 63 - 8 = d^2 + 20d + 55.$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Din THC avem $A^2 - A + dI_2 = O_2$, $d = \det(A)$	1p
$\det(6A + (5 - d)I_2) = \det(2A - (d + 9)I_2) - 8$	1p
Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \det(A + xI_2)$.	1p
Atunci, $f(x) = x^2 + x + d$ $\det(6A + (5 - d)I_2) = 36\det\left(A + \frac{5-d}{6}I_2\right) = 36f\left(\frac{5-d}{6}\right) = d^2 + 20d + 55$	2p
$\det(2A - (d + 9)I_2) - 8 = 4\det\left(A + \frac{-d-9}{2}I_2\right) - 8 = 4f\left(\frac{-d-9}{2}\right) - 8 = d^2 + 20d + 55$	2p

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale pozitive astfel încât $a_1 = 1$ și

$$\frac{(n+1)^3}{a_n^2} - \frac{n^3}{a_{n+1}^2} = n^2(n+1)^2, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \text{ Calculați } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{2k-1} a_{2k}.$$

Soluție:

$$n = 1 \Rightarrow \frac{8}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} = 4 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}.$$

Presupunem că $a_k = \frac{1}{k}, \forall k \leq n$.

Atunci înlocuind în relația din enunț pe a_n cu $\frac{1}{n}$ vom avea $\frac{n^3}{a_{n+1}^2} = (n+1)^3 n^2 - (n+1)^2 n^2$ de

unde $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

$$\text{Avem } \sum_{k=1}^n a_{2k-1} a_{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)2k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$$

$$x_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln 2n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \ln 2n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = x_{2n} + \ln 2n$$

$$\text{Dar } \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{2} (x_n + \ln n),$$

$$\text{prin urmare } \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = x_{2n} + \ln 2n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = x_{2n} + \ln 2n - \frac{1}{2} (x_n + \ln n).$$

$$\text{Deci } \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = x_{2n} + \ln 2n - (x_n + \ln n) = x_{2n} - x_n + \ln 2$$

și deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} - x_n = 0$, deducem că limita este $\ln 2$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Se demonstrează prin inducție că $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$	2p
Deduce că $\sum_{k=1}^n a_{2k-1} a_{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$	1p
Deduce relațiile : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} (x_n + \ln n)$ iar $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = x_{2n} + \ln 2n$	2p
Atunci $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = x_{2n} - x_n + \ln 2n - \ln n \rightarrow \ln 2$	2p

4. Calculați limita $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 - \cos^2 x) \dots (1 - \cos^n x)}{\sin^{2n} x + \ln(1 + x^{2n}) + \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

Se aduce limita L la forma:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 - \cos^2 x) \dots (1 - \cos^n x)}{x^{2n}} \cdot \frac{x^{2n}}{\sin^{2n} x + \ln(1 + x^{2n}) + \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1} = L_1 \cdot L_2$$

Calculează L_1 :

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \dots \cdot \frac{1 - \cos^n x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2} \cdot \dots \cdot \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \dots + \cos^{n-1} x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 + \cos x)}{\frac{x^2}{4}} \cdot \dots \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 + \cos x + \dots + \cos^{n-1} x)}{\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2^n} \cdot (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n) = \frac{n!}{2^n} \end{aligned}$$

Calculează L_2 :

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin^{2n} x}{x^{2n}} + \frac{\ln(1 + x^{2n})}{x^{2n}} + \frac{(1 + x^{2n})^{\frac{1}{n}} - 1}{x^{2n}}} = \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{2n + 1}$$

$$\text{Deduce că } L = \frac{n!}{2^n} \cdot \frac{n}{2n + 1}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 - \cos^2 x) \dots (1 - \cos^n x)}{x^{2n}} \cdot \frac{x^{2n}}{\sin^{2n} x + \ln(1 + x^{2n}) + \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1} = L_1 \cdot L_2$	2p
$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \cos^k x}{x^2} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{2} = \frac{n!}{2^n}$	2p
$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin^{2n} x}{x^{2n}} + \frac{\ln(1 + x^{2n})}{x^{2n}} + \frac{(1 + x^{2n})^{\frac{1}{n}} - 1}{x^{2n}}}$	1p
$L_2 = \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{2n + 1}$	1p
Finalizare	1p

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
11.02.2023**

CLASA a XII -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

1. a) Fie (G, \cdot) un grup și $a, b \in G$ astfel încât $a = b^2$ și $b = a^2$. Să se arate că dacă $x = aba$, atunci $x^3 = e$.
- b) Se consideră un grup (G, \cdot) cu proprietatea că există $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$ astfel încât $(x \cdot y)^m = (y \cdot x)^m$ și $(x \cdot y)^n = (y \cdot x)^n$, $(\forall) x, y \in G$. Să se arate că G este grup comutativ.

Soluție:

Calculând:

a) $a = b^2 = (a^2)^2 = a^4 \Rightarrow a^3 = e$

Analog, se arată că $b^3 = e$.

$$x^2 = (aba) \cdot (aba) = abbbba = ab^3a = a^2$$

$$x^3 = aba \cdot a^2 = ab = a \cdot a^2 = a^3 = e$$

- b) Dacă $(m, n) = 1$ atunci există $p, q \in \mathbb{Z}$ astfel încât $1 = m \cdot p + n \cdot q$

$$x \cdot y = (x \cdot y)^{mp+nq} = (x \cdot y)^{mp} \cdot (x \cdot y)^{nq} = ((x \cdot y)^m)^p \cdot ((x \cdot y)^n)^q =$$

$$((y \cdot x)^m)^p \cdot ((y \cdot x)^n)^q = (y \cdot x)^{mp} \cdot (y \cdot x)^{nq} = (y \cdot x)^{mp+nq} = y \cdot x; (\forall) x, y \in G$$

$\Rightarrow (G, \cdot)$ este grup comutativ

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $a^3 = e$ și $b^3 = e$	1p
$x^2 = a^2$	1p
$x^3 = aba \cdot a^2 = a^3 = e$	1p
b) $(m, n)=1$ atunci $\exists p, q \in \mathbb{Z}$ a.î. $1 = m \cdot p + n \cdot q$	2p
$x \cdot y = (x \cdot y)^{mp+nq} = ((x \cdot y)^m)^p \cdot ((x \cdot y)^n)^q = ((y \cdot x)^m)^p \cdot ((y \cdot x)^n)^q = (y \cdot x)^{mp+nq} = y \cdot x$	2p

2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se consideră o lege de compoziție „ $*$ ” care are următoarele proprietăți:

i) $(x * y) \cdot (x * z) = x * (y + z); (\forall) x, y, z \in M$

ii) $x * 1 = x; (\forall) x \in M$

Arătați că:

a) $2 * 4 \in \mathbb{Q}$

b) $4 * \frac{1}{4} \notin \mathbb{Q}$

c) $\sqrt{2022} * 2022 = 2022^{1011}$

Soluție:

a) Dacă $y = z = 1 \Rightarrow (x * 1) \cdot (x * 1) = x * 2 \Rightarrow x^2 = x * 2; (\forall) x \in M$

Dacă $y = z = 2 \Rightarrow (x * 2) \cdot (x * 2) = x * 4 \Rightarrow (x * 2)^2 = x * 4 \Rightarrow x^4 = x * 4; (\forall) x \in M$

Deci pentru $x = 2 \Rightarrow 2 * 4 = 16 \in \mathbb{Q}$

b) Dacă $y = z = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x * \frac{1}{2}\right)^2 = x * 1 = x; (\forall) x \in M$

Dacă $y = z = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(x * \frac{1}{4}\right)^2 = x * \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x * \frac{1}{4}\right)^4 = \left(x * \frac{1}{2}\right)^2 = x; (\forall) x \in M$

Pentru $x = 4$ obținem $\left(4 * \frac{1}{4}\right)^4 = 4 \Rightarrow \left(4 * \frac{1}{4}\right)^2 = 2 \Rightarrow 4 * \frac{1}{4} = \sqrt{2}$ deoarece $4 * \frac{1}{4} \in M$.

Deci $4 * \frac{1}{4} \notin \mathbb{Q}$

c) Avem că $(x * 1)^2 = x * 2 \Rightarrow x^2 = x * 2; (\forall) x \in M$

Pentru $y = 1$ și $z = 2$ obținem $(x * 1) \cdot (x * 2) = x * 3; (\forall) x \in M$

de unde $x^3 = x * 3; (\forall) x \in M$

Pp că $x^k = x * k; (\forall) x \in M$ și demonstrăm că $x^{k+1} = x * (k + 1); (\forall) x \in M$

$(x * 1) \cdot (x * k) = x * (k + 1) \Rightarrow x \cdot x^k = x * (k + 1); (\forall) x \in M$

$\Rightarrow x^{k+1} = x * (k + 1); (\forall) x \in M$

Conform PIM $\Rightarrow x^n = x * n; (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Pentru $x = \sqrt{2022}$ și $n=2022 \Rightarrow \sqrt{2022}^{2022} = \sqrt{2022} * 2022$

$\Rightarrow \sqrt{2022} * 2022 = 2022^{1011}$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $y = z = 1 \Rightarrow x^2 = x * 2, y = z = 2 \Rightarrow (x * 2)^2 = x * 4, x^4 = x * 4 \Rightarrow$ $2 * 4 = 16 \in \mathbb{Q}$	2p
b) $y = z = \frac{1}{2}$, apoi $y = z = \frac{1}{4}$ și obținem $4 * \frac{1}{4} \notin \mathbb{Q}$	2p
c) Inducție $x^n = x * n; (\forall) n \in \mathbb{N}^*$	2p
Pentru $x = \sqrt{2022}; n = 2022$ obținem concluzia cerută	1p

3. Determinați toate funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, primitivabile, care verifică relația:

$$F(x) + \ln f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right); (\forall) x \in \mathbb{R},$$

unde $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f și $F(0)=0$.

Soluție: $F(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \ln f(x) = \ln \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2} \cdot f(x)}$

$$\Rightarrow e^{F(x)} = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2} \cdot f(x)}$$

$$\Rightarrow e^{F(x)} \cdot f(x) = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}; (\forall) x \in \mathbb{R}$$

Cum $F'(x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (e^{F(x)})' = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = (x + \sqrt{1+x^2})'$$

$$\Rightarrow e^{F(x)} = x + \sqrt{1+x^2} + c, (\forall) x \in \mathbb{R}$$

Pt. $x = 0 \Rightarrow e^{F(0)} = 1 + c \Rightarrow c = 0$

$$\Rightarrow e^{F(x)} = x + \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), (\forall) x \in \mathbb{R}$$

Deci $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$F(x) = \ln \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2} \cdot f(x)}, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{F(x)} \cdot f(x) = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}, (\forall) x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots$	3p
Deducem că $e^{F(x)} = x + \sqrt{1+x^2} + c, (\forall) x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots$	2p
$x = 0 \Rightarrow e^{F(0)} = 1 + c \Rightarrow e^{F(x)} = x + \sqrt{1+x^2}$ $\Rightarrow F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}); (\forall) x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \dots\dots\dots$	2p

4. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = \int_0^x t \sin 2t \, dt$, respectiv $g(x) = \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} \, dt$.
- a) Demonstrați că funcția g este descrescătoare.
- b) Arătați că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$, pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soluție:

- a) $g(x) = G(\cos^2 x) - G(0)$; G o primitivă a lui $h(t) = \arccos \sqrt{t}$; $t \in [0, \cos^2 x]$

Atunci $g'(x) = -x \sin 2x$; $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$g'(x) \leq 0$; $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci g este descrescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- b) $\arccos \sqrt{t} = y \Rightarrow t = \cos^2 y \Rightarrow dt = -\sin 2y \, dy$

Deci $g(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x -y \sin 2y \, dy = \int_x^{\frac{\pi}{2}} y \sin 2y \, dy$

$f(x) + g(x) = \int_0^x t \sin 2t \, dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t \, dt = \frac{\pi}{4}$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Calculează $g'(x) = -x \sin 2x$; $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și $g'(x) \leq 0$; $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci g este descrescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	3p
b) $\arccos \sqrt{t} = y \Rightarrow t = \cos^2 y$ și $g(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} y \sin 2y \, dy$	1p
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t \, dt = \int_0^x t \sin 2t \, dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t \, dt$	1p
$f(x) + g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t \, dt = \frac{\pi}{4}$	2p